<u>Anwendung</u>: „Divergenz der Folge $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ für $q>1$"

schreibe $q = 1+x$ mit $x>0 \Longrightarrow$

$$q^n = (1+x)^n \underset{\text{Satz 3.3}}{\geq} 1+n\cdot x$$

<u>anschaulich</u>: $n\cdot x$ wird beliebig groß bei $n\to\infty$ (dazu braucht man „III. Archimedische Eigenschaft"!), also kann q^n bei $n\to\infty$ <u>keinen endlichen Grenzwert haben</u>

Def 3.1: Absolutbetrag

Die Abbildung $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

heißt <u>Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$</u>.

$|\cdot|$ misst den Abstand zum Ursprung.

<u>Eigenschaften:</u> 0.) $|x| \geq 0$,

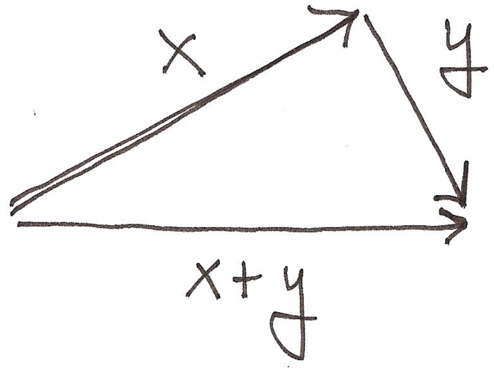
$$-|x| \leq x \leq |x|$$

1.) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(Vorzeichendiskussion beim Produkt!)

2.) Dreiecksungl.: $|x+y| \leq |x| + |y|$

(Die Ungleichung heißt so, weil sie für die Länge von Vektoren gilt)



3.) umgekehrte Dreiecksungl.:

$$\big|\,|x|-|y|\,\big| \leq |x-y| \quad !$$

Beweis: ad 2.) Übung!

per Def. $x \leq |x|$, $y \leq |y|$ $\Longrightarrow$

a) $x+y \leq |x|+|y|$;

entsprechend: $-|x| \leq x$, $-|y| \leq y$ $\Longrightarrow$

b) $-(|x|+|y|) \leq x+y$

Fall 1: $x+y \geq 0$

$$\Longrightarrow \quad |x+y| \underset{\mathrm{Def}}{=} x+y \underset{a)}{\leq} |x|+|y|$$

Fall 2: $x+y \leq 0$

$$\Longrightarrow \quad |x+y| \underset{\mathrm{Def}}{=} -(x+y) \underset{b)}{\leq} |x|+|y|.$$

ad 3.) $\quad |x| = |x-y+y| \underset{2.)}{\leq} |x-y|+|y|$

$$\Longrightarrow \quad |x|-|y| \leq |x-y|;$$

$$|y| = |y-x+x| \leq |x-y|+|x| \Longrightarrow$$

$$|y|-|x| \leq |x-y|;$$

zusammen:

$$-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y| \Longrightarrow \text{Beh}$$

$\square$

III. Archimedische Eigenschaft

Axiom von Archimedes:

> Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.

- folgt nicht aus dem Bisherigen!
- $\mathbb{N}$ ist also unbeschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$
- gilt auch in $\mathbb{Q}$, zeichnet $\mathbb{R}$ also noch nicht aus!

~~als grundlegend für 1te einfache Aussagen über Grenzwerte ergibt~~

Folgerungen

Satz 3.4:

(i) Zu $\underbrace{x, y \in \mathbb{R}}_{}$ mit $x, y > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\boxed{n \cdot x > y}$.

(benutze "Axiom" mit y/x statt x)

(ii) Ist $\boxed{q > 1}$, so gibt es zu jedem $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, ein $\boxed{n \in \mathbb{N}}$ mit $\boxed{q^n > K}$.

(„Die Folge q^n übersteigt jede Schranke K, sie geht gegen ∞.")

(iii) Ist $\boxed{0 < q < 1}$ aus $\mathbb{R}$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\boxed{q^n < \varepsilon}$.

(„Für $0 < q < 1$ ist q^n eine Nullfolge.")

Bew: ii) $q > 1 \Longrightarrow x := q - 1 > 0$;

zu $K > 0$ wähle gemäß (i) ein $n \in \mathbb{N}$

mit $\boxed{n \cdot x > K}$.

$$\Longrightarrow q^n = (x+1)^n \geq 1 + n \cdot x > n \cdot x > K.$$

Satz 3.3!

iii) benutze ii) mit $\frac{1}{q} > 1$ und $K := \frac{1}{\varepsilon}$

$$\Longrightarrow \left(\frac{1}{q}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow q^n < \varepsilon.$$

$\square$

IV. Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

gezeigt: es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit

$$x^2 = 2$$

andererseits: analytisch / geometrische Probleme führen auf Zahlen wie

$\sqrt{2}$ = Länge Diagonale im Einheitsquadrat

π = Inhalt Einheitskreis

Wie bekommt man solche irrationalen Zahlen? (natürlich bei der axiomatischen Konstruktion von $\mathbb{R}$)

Wir benutzen das Intervallschachtelungsprinzip

Def 3.2 : Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

abgeschlossenes Intervall,

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

offenes Intervall, ($\emptyset$ für $a=b$),

$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

halboffene Intervalle, ($\emptyset$ für $a=b$),

a, b Endpunkte, $b-a$ = Länge.

Abgeschlossene Intervalle nennt man auch Kompakt.

Def 3.3: Intervallschachtelung (IS)

Eine Folge $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{kompakter}}$!
Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ heißt
eine (IS), falls gilt:

i) $\forall n: I_{n+1} \subset I_n$ Monotonie

ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein
$n = n_\varepsilon$ mit
$$|I_n| := b_n - a_n < \varepsilon$$

Bem: 1.) aus i) und ii) folgt zusammen:

ii)* $|I_m| < \varepsilon \quad \forall m \geq n$

2.) $I_n := [0, \frac{1}{n}]$ ist ein I.S.

nach dem Axiom von Archimedes; es gilt: $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

3.) anschauliche Vorstellung: jede I.S zieht sich auf eine reelle Zahl zusammen

<u>Beispiel</u>: Definiere rekursiv die folgende I S:

$$I_1 := [1, 2] \quad (a_1 := 1, a_2 := 2);$$

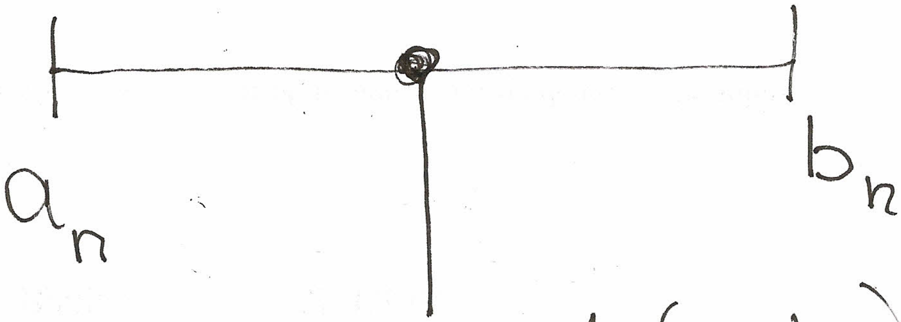
sind $I_1, \ldots\ldots, I_n$ konstruiert mit $I_\ell = [a_\ell, b_\ell]$, $1 \le \ell \le n$, wobei

$$1 \le \ell \le n: \boxed{a_\ell^2 \le 2 \le b_\ell^2 , \quad |I_\ell| \le \tfrac{1}{2} |I_{\ell-1}|}$$

„leere Bedingung für $\ell = 1$"

so definiert man $I_{n+1} := [a_{n+1}, b_{n+1}]$

wie folgt: betrachte c_n wie im Bild



$$c_n := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

- $c_n^2 \ge 2 \implies I_{n+1} := [a_n, c_n]$ (linke Hälfte)

• $c_n^2 < 2 \Longrightarrow I_{n+1} := [c_n, b_n]$

(Ordnungsaxiom: genau eine Möglichkeit tritt ein)

<u>Offenbar</u>: 1.) $a_n, b_n \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2.) $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist IS

3.) <u>falls</u> es ein $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ gibt, so erfüllt x die Gleichung

$$x^2 = 2$$

(vgl. Beweis von Satz 3.5)

s.u.

Die Existenz von diesem X folgt nicht aus I. - III, wir verlangen von unserem Zahlkörper $\mathbb{R}$ das

<u>Vollständigkeitsaxiom</u>:

Ist $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine **IS**, so gibt es in $\mathbb{R}$ ein x mit

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n .$$

<u>Bem</u>: 1.) die Beschränkung auf <u>Kompakte</u> Intervalle ist nötig, denn z.B.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset$$

nach Archimedes

2.) Eine IS definiert genau eine Zahl x.

Beweis: Seien $x \neq x'$ aus $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$,

o. E. $x' < x$. Aus $x', x \in I_n$

folgt $[x', x] \subset [a_n, b_n]$

$$\Longrightarrow \quad |I_n| = b_n - a_n \geq x - x'$$

wähle nun in Eigenschaft ii) von IS

$$\varepsilon := \frac{x - x'}{2},$$

Widerspruch! $\square$

Satz 3.5 : Existenz von Wurzeln

Sei $x > 0$ eine reelle Zahl und $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, mit

$$\boxed{x = y^k}$$

Schreibweisen: $\boxed{y = \sqrt[k]{x}\ , \ y = x^{1/k}}$

Beweis: Sei o. E. $k \geq 2$; außerdem o. E. $\boxed{x \geq 1}$ [ist $x \in (0,1)$, so betrachte $x' := 1/x > 1$

$\Longrightarrow$ finde y' mit $x' = (y')^k$

$\Longrightarrow$ $x = \left(1/y'\right)^k$, also $y := 1/y'$]

definiere <u>rekursiv</u> eine IS

$$I_n = [a_n, b_n]$$

mit

$$\left.\begin{aligned} &(1)_n \quad a_n^k \le x \le b_n^k \\ &(2)_n \quad |I_n| \le \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} |I_1| \end{aligned}\right\} \forall n \in \mathbb{N}$$

Sei $\boxed{I_1 := [1, 1+x].}$

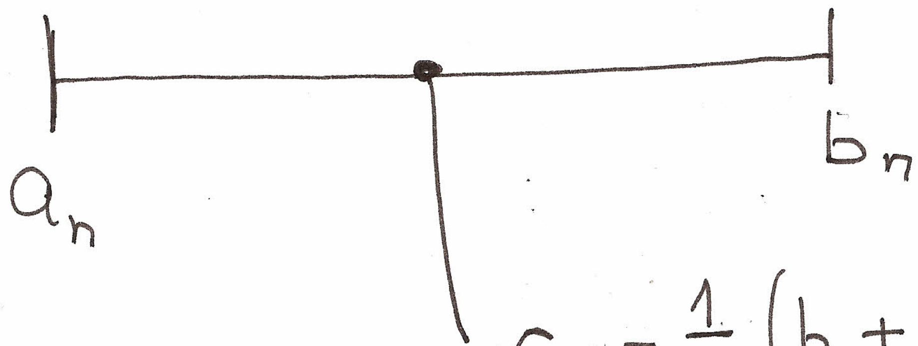
$(2)_1$: ✓

$(1)_1$: Zu zeigen ist nur

$$x \le b_1^k \left(= (1+x)^k \right)$$

Das folgt aber aus Bernoulli.

Seien $I_1, \ldots, I_n$ konstruiert mit (1), (2). $I_{n+1} := ?$



$c_n := \frac{1}{2}(b_n + a_n)$

Mittelpunkt

Setze

$$I_{n+1} := \begin{cases} [a_n, c_n], & \text{falls } x \leq c_n^k \\ [c_n, b_n], & \text{falls } x > c_n^k \end{cases}$$

(also: I_{n+1} linke oder rechte Hälfte von I_n)

$\Longrightarrow$ $(1)_{n+1}$, $(2)_{n+1}$ klar